SPEKTROSKOPISCHER VERGLEICH ZWISCHEN DEN THEORIEN DES STARREN UND DES DEFORMIERBAREN ELEKTRONS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
II. SEKTION

DER

KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

VORGELEGT AM 15. FEBRUAR 1917

VON

KARL GLITSCHER.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1917

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig. 218

Herrn

Peter Langen,

Direktor der Gasmotorenfabrik Deutz,

gewidmet.

Einleitung.

Kaufmann bestimmte im Jahre 1901 aus der gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Ablenkung von β-Strahlen das Verhältnis der Ladung e des Elektrons zu seiner Masse m. Aus seiner berühmten Figur, die von den abgelenkten Strahlen auf der auffangenden photographischen Platte erzeugt wird, war zu ersehen, daß das Verhältnis e/m mit wachsender Geschwindigkeit v der β-Teilchen abnahm und der Null zustrebte mit Annäherung an eine endliche Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit c. Bei kleinem v ergab sich ein e/m, das mit dem aus Messung an langsamen Kathodenstrahlen gewonnenen Werte übereinstimmte.

Da man keine veränderliche Elementarladung annehmen konnte, mußte man die Masse m als mit der Geschwindigkeit veränderlich ansehen. J. J. Thomson hatte zuvor schon aus der Maxwellschen Theorie gefolgert, daß die „elektromagnetische Masse" einer jeden bewegten elektrischen Ladung, vermöge des um sie herum entstehenden Magnetfeldes, ins Unendliche wachsen müßte mit Zunahme der Geschwindigkeit bis zur Lichtgeschwindigkeit.

Eine genauere Theorie des Elektrons arbeitete Abraham[1]) 1902 aus, wobei er die Annahme machte, daß das Elektron rein elektromagnetischer Natur und eine starre Kugel sei und bei der Bewegung seine Kugelform beibehalte. Die Formeln dieser „Theorie des starren Elektrons" schienen mit den Kaufmannschen Messungen gut im Einklang zu stehen. Als jedoch Lorentz[2]) eine „Theorie des deformierbaren Elektrons" aufstellte, das sich in der Bewegungsrichtung in einer

1) Gött. Nachr. 1902, p. 20; Ann. d. Phys. **10.** p. 105. 1903.
2) Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam 1904, p. 986.

von der Geschwindigkeit gesetzmäßig abhängigen Weise verkürzen sollte, und als er zeigte, daß die Massenveränderlichkeit nach seiner Theorie ebenfalls mit den Kaufmannschen Messungen in Übereinstimmung zu bringen war, wenn man die Apparatkonstanten in erlaubten Grenzen abänderte, wurde es nötig, zwischen der Abrahamschen und der Lorentzschen Theorie zu entscheiden. Die Frage wurde um so wichtiger, als Einsteins[1]) Relativitätstheorie, aus der die Abhängigkeit jeder Masse von der Geschwindigkeit folgt, ebenfalls zu den Lorentzschen Formeln gelangt war, so daß sich aus einem etwaigen experimentellen Widerspruche gegen das Lorentzsche Elektron auch ein Einwand gegen das Relativitätsprinzip hätte machen lassen.

Kaufmann[2]) nahm daraufhin seine Messungen wieder auf und kam zu der Ansicht, daß Abrahams Theorie bestätigt wurde; freilich arbeitete er mit einem Werte

$$\frac{e}{m_0} = 1{,}86 \cdot 10^7$$

für langsame Kathodenstrahlen, der mit dem heute angenommenen ($1{,}765 \cdot 10^7$) nicht übereinstimmte. Planck[3]) glaubte, diese neuen Messungen mit der Relativitätstheorie in Einklang bringen zu können durch die Annahme, daß das von Kaufmann benutzte elektrische Feld ca. 10 Proz. kleiner gewesen sei als tatsächlich gemessen. Kaufmann konnte hierfür jedoch keinen Grund finden, so daß seine Ergebnisse anscheinend mehr für das starre als für das deformierbare Elektron sprechen.

Bucherer[4]) stellte die Ablenkungsversuche mit β-Strahlen in sinnreich abgeänderter Weise an und glaubte eine Bestätigung der relativistischen Formeln gefunden zu haben. Mit seinen experimentellen Methoden war jedoch Bestelmeyer[5]) nicht einverstanden. Schaefer und Neumann[6]) führten mit

1) Ann. d. Phys. **17.** p. 891. 1905, u. Anm. 2 von p. 5, abgedruckt in Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1913.

2) Ann. d. Phys. **19.** p. 487. 1906.

3) Verh. d. D. Physik. Ges. **9.** p. 301. 1907.

4) Ann. d. Phys. **28.** p. 513. 1908.

5) Ann. d. Phys. **30.** p. 166 u. 974. 1909.

6) Verh. d. D. Physik. Ges. **15.** p. 935. 1913; Ann. d. Phys. **45.** p. 529. 1914.

den wenig abgeänderten Apparaten Bucherers und nach seinen Methoden die Versuche nochmals aus und gelangten wie dieser zu einer Bestätigung der Lorentzschen Theorie. Auch die Versuche Hupkas[1]) mit Kathodenstrahlen großer Geschwindigkeit scheinen mit dieser Theorie besser übereinzustimmen als mit der Abrahams.

Eine endgültige Entscheidung zwischen beiden Theorien darf man trotzdem noch nicht als gefallen ansehen. Jedenfalls ist ein Vergleich auf einem anderen Gebiete als dem der Ablenkung von β-Strahlen sehr erwünscht. Als solches bietet sich uns nach Aufstellung der Theorie der Feinstruktur wasserstoffähnlicher Spektren durch Sommerfeld[2]) die Spektroskopie. Sommerfeld fand die Feinstruktur, als er dem Bohrschen Modell neben der azimutalen auch eine radiale Quantenbedingung auferlegte und Impuls und Energie des Elektrons nicht durch die Formeln der gewöhnlichen Mechanik, sondern der Relativitätstheorie ausdrückte. W. Lenz stellte darauf in einem Feldpostbriefe an Sommerfeld die Frage, wie sich die Feinstruktur bei Anwendung der Abrahamschen Formeln ergeben würde; man müßte, falls es die Meßgenauigkeit erlaubte, auf diesem Wege zwischen Abraham und Lorentz-Einstein entscheiden können.

Diese Bemerkung gab die Veranlassung zu vorliegender Arbeit. Danach hätten wir im folgenden genau so zu verfahren wie Sommerfeld, nur müßten wir statt von den relativistischen Formeln für Impuls und Energie von den Abrahamschen Gebrauch machen. In mathematischer Hinsicht zeigt sich dabei, daß sich der exakten Ausführung des radialen Phasenintegrals große Schwierigkeiten in den Weg stellen, die bei der Relativität nicht auftreten. Wenn man aber Impuls und Energie in Potenzreihen von

$$\beta = \frac{v}{c}$$

entwickelt und diese je nach der verlangten Genauigkeit früher oder später abbricht, wird die Rechnung ziemlich einfach. Bei Einführung allgemeiner Koeffizienten in die Potenzreihen lassen sich sogar die Spektralformeln mit Abrahamschem und Lorentzschem Elektron gleichzeitig herleiten. Diese

1) Ann. d. Phys. **31.** p. 169. 1910.
2) Ber. d. Münch. Akad. p. 425. 1915; Ann. d. Phys. **51.** p. 1. 1916.

Näherungsrechnung wird in unserer Arbeit zweimal ausgeführt. Nachdem die beiden Quantenbedingungen aufgestellt sind, wird die Integration zunächst in einer ersten Näherung bewerkstelligt, deren Genauigkeit in der Darstellung der Feinstruktur der Balmerlinien und der Bohrschen Heliumlinien zur Prüfung beider Theorien an den von Paschen[1]) gemessenen Heliumlinien ausreicht. Um das Verhalten des von Sommerfeld als streng wasserstoffähnlich ermittelten L-Termes der Röntgenspektren auch mit starrem Elektron zu studieren, ist eine weitere Näherung nötig, die ebenfalls ausgeführt wird. Es zeigt sich in beiden Fällen, daß die Beobachtungen nur mit der Relativitätstheorie übereinstimmen.

I. Die erste Näherung und die Feinstruktur der Balmerlinien.

§ 1. Die Quantenbedingungen.

Das Bohrsche Modell des Wasserstoffs besteht bekanntlich aus einem Elektron, das einen positiv geladenen Kern in quantenhaft ausgezeichneten Bahnen umläuft. Das Elektron besitzt die Elementarladung $-e$, der Kern, wie wir der Allgemeinheit wegen annehmen wollen, die Ladung $+E$. Für den Sonderfall des neutralen Wasserstoffatoms ist $E = e$, für den des ionisierten Heliums $E = 2e$.

Wenn sich das Elektron im Abstande r von dem ruhend (Kernmasse $= \infty$) angenommenen Kern befindet, ist die Energiekonstante des Systems

$$W = T - \frac{eE}{r}, \tag{1}$$

worin T die kinetische, $-eE/r$ die potentielle Energie bedeutet.

Als Koordinaten des Elektrons wählen wir außer seinem Abstande r vom Kern den Winkel φ, den es, von einer beliebig wählbaren Anfangsrichtung an gerechnet, durchlaufen hat. Daß diese Koordinaten die dem Problem angepaßten Koordinaten sind, wurde schon von Sommerfeld[2]) vermutet und folgt streng aus der allgemeinen Regel Epsteins[3]) und Schwarzschilds[4]) über die Koordinatenauswahl.

1) Ann. d. Phys. **50.** p. 901. 1916.
2) Ann. d. Phys. **51.** p. 1. 1916.
3) Ann. d. Phys. **50.** p. 489. 1916; **51.** p. 168. 1916.
4) Berl. Ber. 1916. p. 548.

Wir legen Sommerfelds Quantenbedingungen zugrunde, nach denen für jeden Freiheitsgrad (Koordinate q_i) mit dem zugehörigen Impulse p_i das „Phasenintegral" ein ganzes Vielfaches (n_i) des Planckschen Wirkungsquantums h ist; also

$$\oint p_i \, d q_i = n_i \, h .$$

Der am Integralzeichen befindliche Kreis bedeutet, daß die Integrationsgrenzen so zu nehmen sind, daß „jede Koordinate erstreckt wird über den vollen Bereich, den sie zur eindeutigen Bezeichnung der Phasen des Systems zu durchlaufen hat".[1]) Bei unserem zyklischen Azimut φ ist dies der Bereich von 0 bis 2π, bei unserem Fahrstrahl r das doppelt zu durchlaufende Gebiet von $r_{\min.}$ bis $r_{\max.}$ Wir haben demnach die Quantenbedingungen

a) die azimutale:

$$\int_0^{2\pi} m r^2 \dot{\varphi} \, d\varphi = n h ,$$

b) die radiale:

$$\oint (m \dot{r}) \, d r \quad = n' h .$$

Bei unserer Bewegung gilt offenbar der Flächensatz

$$m r^2 \dot{\varphi} = p ,$$

wobei p die Flächenkonstante bedeutet. Aus dem Quantenintegral a) erhält man also in altbekannter Weise

$$\int_0^{2\pi} m r^2 \dot{\varphi} \, d\varphi = p \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p = n h ,$$

$$p = \frac{n h}{2\pi} . \tag{2}$$

Die Quantenbedingung b) rechnen wir in eine für alles Folgende wichtige Form um. Die radiale Komponente ($m \dot{r}$) ergibt sich aus dem Gesamtimpuls ($m v$) und seiner Komponente in Richtung des wachsenden φ (azimutaler Impuls $= m r \dot{\varphi}$) zu

$$m \dot{r} = \sqrt{(m v)^2 - (m r \dot{\varphi})^2} = \sqrt{(m v)^2 - \frac{p^2}{r^2}} .$$

Die Quantenbedingung b) lautet also

$$n' h = \oint \sqrt{(m v)^2 - \frac{p^2}{r^2}} \, d r . \tag{3}$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 7.

Dies läßt sich ausführen, wenn $m\,v$ als Funktion von r bekannt ist, was aber nicht ohne weiteres der Fall ist; vielmehr ist $m\,v$ als Funktion von β gegeben. Da aber auch die kinetische Energie T als Funktion von β bekannt ist, läßt sich der Impuls nach Elimination von β durch T und damit vermöge (1) durch r ausdrücken.

§ 2. Näherungen für Impuls und Energie.

Nach Abraham[1]) schreibt sich der Impuls, wenn m_0 die „Ruhmasse" des Elektrons bedeutet,

$$m\,v = \tfrac{3}{4}\,m_0\,c\,\frac{1}{\beta}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 1\right)$$
$$= m_0\,c\,\beta\left(1 + \frac{6}{3\cdot 5}\,\beta^2 + \frac{9}{5\cdot 7}\,\beta^4 + \ldots\right),$$

die kinetische Energie[2])

$$T = \tfrac{3}{4}\,m_0\,c^2\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right)$$
$$= \frac{m_0\,c^2\,\beta^2}{2}\left(1 + \tfrac{3}{5}\,\beta^2 + \tfrac{3}{7}\,\beta^4 + \ldots\right).$$

Die entsprechenden Gleichungen der Relativitätstheorie lauten:

$$m\,v = \frac{m_0\,c\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\,c\,\beta\left(1 + \tfrac{1}{2}\,\beta^2 + \tfrac{3}{8}\,\beta^4 + \ldots\right),$$
$$T = m_0\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{m_0\,c^2\,\beta^2}{2}\left(1 + \tfrac{3}{4}\,\beta^2 + \tfrac{5}{8}\,\beta^4 + \ldots\right).$$

Ersichtlich können wir, wenn wir uns auf Potenzen mit β^4 beschränken, allgemein für beide Fälle ansetzen:

$$m\,v = m_0\,c\,\beta\,(1 + a\,\beta^2), \tag{4}$$

$$T = \frac{m_0\,c^2\,\beta^2}{2}\,(1 + b\,\beta^2). \tag{5}$$

---

1) Vgl. z. B. Abraham, Theorie der Elektrizität II, 3. Aufl., p. 162 u. 175.

2) Bei Abraham (l. c.) ist die Energie des Elektrons (bei ihm mit W bezeichnet)

$$= \tfrac{3}{4}\,m_0\,c^2\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 1\right).$$

In diesem Ausdrucke steckt noch die elektrostatische Energie $\frac{3}{4}\,m_0\,c^2$ des ruhenden Elektrons, die hier offenbar nicht in Betracht kommt und daher abzuziehen ist. Aus diesem Grunde steht in der Klammer bei uns -2 statt -1, wodurch die kinetische Energie so „normiert" ist, daß für $\beta = 0$ auch $T = 0$ wird.

Aus der letzten Gleichung folgt, wenn wir als allererste Näherung

$$\beta^2 = \frac{2T}{m_0 c^2}$$

nehmen,

$$\beta^2 = \frac{2T}{m_0 c^2}\left(1 - b\frac{2T}{m_0 c^2}\right).$$

Wir haben ferner

$$(6)\quad \begin{cases} (m v)^2 = m_0{}^2 c^2 \beta^2 (1 + 2a\beta^2) \\ \quad = 2 m_0 T\left[1 + 2(2a - b)\frac{T}{m_0 c^2}\right] = 2 m_0 T\left(1 + \gamma\frac{T}{m_0 c^2}\right), \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\gamma = 2(2a - b)\ .$$

Im Abrahamschen Falle ist

$$(6a)\qquad a = \tfrac{2}{5},\quad b = \tfrac{3}{5},\quad \gamma = \tfrac{2}{5},$$

im Lorentzschen Falle

$$(6b)\qquad a = \tfrac{1}{2},\quad b = \tfrac{3}{4},\quad \gamma = \tfrac{1}{2}.$$

Um $(m v)^2$ als Funktion von r zu schreiben, benutzen wir (1) und erhalten

$$(7)\quad (m v)^2 - \frac{p^2}{r^2} = 2 m_0\left(W + \frac{e E}{r}\right)\left[1 + \frac{\gamma}{m_0 c^2}\left(W + \frac{e E}{r}\right)\right] - \frac{p^2}{r^2}.$$

§ 3. Das radiale Phasenintegral.

Wir schreiben (3) jetzt folgendermaßen:

$$(8)\quad n' h = \oint p_r\, dr = \oint \sqrt{(m v)^2 - \frac{p^2}{r^2}}\, dr = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr.$$

Darin ist, wie der Vergleich mit (7) zeigt,

$$(9)\quad \begin{cases} A = 2 m_0 W\left(1 + \gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right), \\ B = m_0 e^2\left(\frac{E}{e}\right)\left(1 + 2\gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right), \\ C = -\left(\frac{n h}{2\pi}\right)^2\left[1 - 2\gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Die hier eingeführte, für die Feinstruktur wichtige Größe

$$(10)\qquad \alpha = \frac{2\pi e^2}{c h}$$

bedeutet, wie leicht zu sehen, das Verhältnis der Geschwindigkeit im innersten Bohrschen Kreise zur Lichtgeschwindigkeit; sie ist also von der Ordnung β. Wir dürfen demnach bei konsequenter Näherungsrechnung nicht weiter als bis zu α^4 gehen.

Um die genannte Bedeutung von α zu zeigen, erinnern wir an die Bohrsche azimutale Quantenbedingung für die Kreisbahn beim Wasserstoffatom

$$m r^2 \omega = \frac{n h}{2 \pi},$$

(ω = Winkelgeschwindigkeit), ferner an das Gleichgewicht der Coulombschen Anziehung mit der Zentrifugalkraft

$$m r^3 \omega^2 = e^2.$$

Durch Division der ersten in die letzte Gleichung folgt, wenn wir außerdem beiderseits durch c dividieren,

$$\frac{r \omega}{c} = \frac{2 \pi e^2}{n c h} = \frac{\alpha}{n}.$$

Für $n = 1$ ist aber $r \omega$ die Geschwindigkeit auf der innersten Kreisbahn, wodurch die behauptete Bedeutung von α nachgewiesen ist.

Nach der Vorschrift in § 1 haben wir in (8) die Integration nach r längs der reellen Achse von $r_{\text{min.}}$ bis $r_{\text{max.}}$ zu erstrecken, und von da wieder zurück. Der Integrand

$$p_r \, d r = (m \dot{r}) \, d r = (m \dot{r}^2) \, d t$$

ist so sicher positiv, wie der Fortschritt der Zeit positiv ist. Daher ist bezüglich des Vorzeichens der Quadratwurzel

$$p_r = \sqrt{A + 2 \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}$$

zu sagen, daß dieses positiv sein muß bei positivem $d r$ (auf dem Wege von $r_{\text{min.}}$ nach $r_{\text{max.}}$), negativ beim negativen $d r$ (auf dem Wege von $r_{\text{max.}}$ nach $r_{\text{min.}}$). $r_{\text{max.}}$ und $r_{\text{min.}}$ sind gegeben durch die Nullstellen des Radikanden; diese sind zugleich die „Verzweigungspunkte" des Integranden in der komplexen r-Ebene. Auch die Integration[1]) werden wir weiterhin in der komplexen r-Ebene ausführen, indem wir das Integral über einen Umlauf um den „Verzweigungsschnitt" zwischen $r_{\text{min.}}$ und $r_{\text{max.}}$ auf dem oberen Blatte der Riemannschen Fläche unserer

1) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 1916. p. 500.

Quadratwurzel nehmen. Im Sinne der obigen Vorzeichenfestsetzung sind die beiden „Ufer“ des Verzweigungsschnittes in untenstehender Figur mit + und — bezeichnet. Die Werte der Wurzel an anderen Stellen der komplexen Ebene können danach leicht bestimmt werden. Man gelangt z. B. zum Werte $r = 0$ vom positiven Ufer des Verzweigungsschnittes aus mittels einer negativen Drehung durch den Winkel π um den Verzweigungspunkt $r_{\text{min.}}$ Die Wurzel muß also dort mit dem Faktor

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$$

versehen werden. Nach dem Punkte $r = \infty$ gelangt man vermittels einer positiven Drehung durch π um den Verzweigungspunkt $r_{\text{max.}}$ Dies bringt den Faktor

$$e^{+\frac{i\pi}{2}} = +i$$

mit sich.

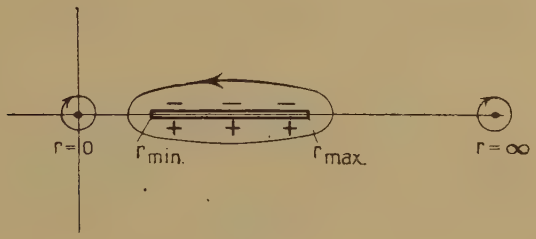

Fig. 1.

Unseren Umlauf um den Verzweigungsschnitt ziehen wir nun zu einem Umlauf um die singulären Stellen zusammen; diese bestehen aus den Polen in den Punkten $r = 0$ und $r = \infty$. Wir haben hier die Residuen N bzw. U zu bilden und ihre Summe nach dem Cauchyschen Residuensatze mit $-2\pi i$ (das Minuszeichen wegen des negativen Umlaufs) zu multiplizieren, um sofort den Wert des gesuchten Integrals zu bekommen. Das Residuum N für den Nullpunkt findet man aus der dort gültigen Entwicklung

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \frac{\sqrt{C}}{r}\left(1 + \frac{B}{C}r + \ldots\right),$$

als Koeffizienten von $1/r$ zu

$$N = \sqrt{C}.$$

Den Unendlichkeitspunkt transformieren wir durch reziproke Radien in den Nullpunkt. Wir haben also

$$r = \frac{1}{s}, \quad dr = -\frac{ds}{s^2};$$

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr = -\sqrt{A + 2Bs + Cs^2}\,\frac{ds}{s^2}$$

und die Entwicklung

$$-\sqrt{A + 2Bs + Cs^2}\,\frac{ds}{s^2} = -\frac{\sqrt{A}}{s^2}\left(1 + \frac{B}{A}s + \ldots\right)ds.$$

Das Residuum U für

$$r = \frac{1}{s} = \infty$$

ist der Koeffizient von ds/s, also

$$U = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Wir haben also schließlich

$$n'h = \oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr = -2\pi i(N + U).$$

$$n'h = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \tag{11}$$

Hierin ist nach unseren obigen Vorzeichenbetrachtungen $\sqrt{C}$ als Nullpunktsbeitrag eine negativ-imaginäre Größe, $\sqrt{A}$ als Beitrag von dem unendlich fernen Punkte eine positiv-imaginäre Größe.

§ 4. Berechnung der Energie.

Setzen wir in (11) die Werte für A, B und C aus (9) ein, so erhalten wir

$$n'h = -nh\sqrt{1 - 2\gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2} + 2\pi i\,\frac{m_0 e^2\left(\frac{E}{e}\right)\left(1 + 2\gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right)}{\sqrt{2m_0 W}\left(1 + \gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right)^{1/2}}.$$

Es sei zur Abkürzung

$$L = n' + n\sqrt{1 - 2\gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2}, \tag{12}$$

dann wird

$$L^2 = \frac{-\left(\frac{2\pi e^2}{ch}\right)^2\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1 + 2\gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right)^2\left(1 + \gamma\frac{W}{m_0 c^2}\right)^{-1}}{2\frac{W}{m_0 c^2}}$$

und mit Rücksicht auf (10)

$$\frac{W}{m_0 c^2} = \frac{-\alpha^2 \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left(1 + 2\gamma \frac{W}{m_0 c^2}\right)^2 \left(1 + \gamma \frac{W}{m_0 c^2}\right)^{-1}}{2 L^2}.$$

Hieraus ersieht man, daß $W/m_0 c^2$ von der Ordnung α^2 ist. Infolgedessen müssen wir bei konsequenter Näherung auf der rechten Seite mit der ersten Potenz von $W/m_0 c^2$ abbrechen und schreiben

$$\frac{W}{m_0 c^2} = \frac{-\alpha^2 \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left(1 + 3\gamma \frac{W}{m_0 c^2}\right)}{2 L^2}$$

oder, indem wir rechter Hand für $W/m_0 c^2$ die allererste Näherung

$$-\frac{\alpha^2 \left(\frac{E}{e}\right)^2}{2 L^2}$$

einsetzen,

$$W = -\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2 L^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma \frac{\alpha^2}{L^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2\right].$$

Es ist nach (10)

$$\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2} = \frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2} = N h,$$

worin N die Rydbergsche Zahl für unendlich große Kernmasse (unbeweglichen Kern) bedeutet. Nach Paschen (l. c.) ist

$$N = 109737{,}18 \text{ Wellenzahlen cm}^{-1}.$$

Es wird also

$$W = -\frac{N h}{L^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma \frac{\alpha^2}{L^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2\right].$$

Hierin ist jetzt für L der Wert (12) einzuführen und nach Potenzen von α^2 zu entwickeln. Es ergibt sich

$$L = n' + n\sqrt{1 - 2\gamma \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2} = (n + n') \left[1 - \gamma \frac{\alpha^2}{n(n+n')} \left(\frac{E}{e}\right)^2\right],$$

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{(n+n')^2} \left[1 + 2\gamma \frac{\alpha^2}{n(n+n')} \left(\frac{E}{e}\right)^2\right].$$

Nunmehr wird

(13a)
$$\left\{ W = -\frac{N h}{(n+n')^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2 \left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma \frac{\alpha^2}{(n+n')^2} \left(\frac{E}{e}\right)^2 + 2\gamma \frac{\alpha^2}{n(n+n')} \left(\frac{E}{e}\right)^2\right], \right.$$

oder

$$W = -\frac{Nh}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1 + 2\gamma\frac{\alpha^2}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(\frac{1}{4} + \frac{n'}{n}\right)\right]. \tag{13b}$$

Durch diese Formel haben wir endgültig die Energiekonstante der Bewegung eines Elektrons um einen E-fach geladenen Kern gefunden. Da bei der Bewegung ein n-faches azimutales und ein n'-faches radiales Wirkungsquantum vorausgesetzt wurden, wollen wir diese Energie mit $W_{n,n'}$ bezeichnen. Analog ist $W_{m,m'}$ die Energie in einer anderen Bahn mit azimutalem Quantum m und radialem Quantum m'. Geht das Elektron von der Bahn (m, m') größerer Energie über auf die Bahn (n, n') geringerer Energie, so ist die freiwerdende Energie $W_{m,m'} - W_{n,n'}$ ein Maß für die Wellenzahl ν der dabei ausgesandten Spektrallinie. Es gilt hier die bekannte Bohrsche Frequenzbedingung

$$W_{m,m'} - W_{n,n'} = h\nu. \tag{14}$$

Hiernach können wir ohne weiteres aus den Gleichungen (13) und (14) eine Formel zur Darstellung des Balmerspektrums gewinnen.

§ 5. Die Feinstruktur der Balmerlinien.

Wir wollen die Spektralformel nicht explicite hinschreiben, sondern nur bemerken, daß sie aus einem positiven Term besteht, der der Endbahn entspricht, und einem negativen, der von der Anfangsbahn herrührt. Die Energie in (13) hat negatives Vorzeichen; im ersten positiven Term der Spektralformel tritt also die Energie mit umgekehrtem Vorzeichen auf. Dies haben wir zu beachten, wenn wir im engsten Anschluß an Sommerfeld (l. c.) nach der Feinstruktur fragen, die durch den ersten Term, die Endbahn, bedingt wird. Ist z. B. $n + n' = 2$, so kann

$$n = 2,\ n' = 0 \quad \text{und} \quad n = 1,\ n' = 1$$

sein. $n = 0$, $n' = 2$ ist ausgeschlossen. Geht also ein Elektron von einer beliebigen Ausgangsbahn auf die durch $n + n' = 2$ bedingte Endbahn über, so können zwei Spektrallinien, ein Dublett, entstehen. Die Differenz ihrer beiden Wellenzahlen ergibt sich aus (13) und (14) mit Beachtung des über das Vorzeichen Gesagten:

$$(15) \qquad \Delta \nu = -\frac{W_{1,1} - W_{2,0}}{h} = 2\gamma \frac{N\alpha^2}{2^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4.$$

Die Linie (1,1) gehört dabei ersichtlich zu einer (ellipsenähnlichen) Bahn von größerer Energie als die Linie (2,0) (Kreisbahn). Letztere, die wegen der mutmaßlich größeren Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von Kreisbahnen die intensivere ist, liegt daher nach Rot zu, erstere nach Violett.

Ist $n + n' = 3$, so gibt es die Möglichkeiten

$$n = 3,\ n' = 0; \quad n = 2,\ n' = 1; \quad n = 1,\ n' = 2;$$

dies gibt Veranlassung zu einem Triplett mit den Schwingungsdifferenzen

$$(16) \qquad \begin{cases} \Delta \nu_1 = -\dfrac{W_{2,1} - W_{3,0}}{h} = 2\gamma \dfrac{1}{2} \dfrac{N\alpha^2}{3^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta \nu_2 = -\dfrac{W_{1,2} - W_{2,1}}{h} = 2\gamma \dfrac{3}{2} \dfrac{N\alpha^2}{3^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4. \end{cases}$$

Der Abstand der Linien (3,0) und (2,1) verhält sich zu dem der Linien (2,1) und (1,2) wie 1: 3.

Entsprechend lauten die Gleichungen für ein Quartett $n + n' = 4$

$$(17) \qquad \begin{cases} \Delta \nu_1 = -\dfrac{W_{3,1} - W_{4,0}}{h} = 2\gamma \dfrac{1}{3} \dfrac{N\alpha^2}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta \nu_2 = -\dfrac{W_{2,2} - W_{3,1}}{h} = 2\gamma \dfrac{2}{3} \dfrac{N\alpha^2}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4, \\ \Delta \nu_3 = -\dfrac{W_{1,3} - W_{2,2}}{h} = 2\gamma\, 2\, \dfrac{N\alpha^2}{4^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4. \end{cases}$$

Das Abstandsverhältnis ist 1 : 2 : 6.

§ 6. Die Feinstruktur mit starrem und deformierbarem Elektron.

Wir kommen zu dem Hauptzwecke unserer Arbeit, nämlich anzugeben, wie sich die Feinstruktur ändert, je nachdem der Rechnung die Abrahamsche oder die Lorentzsche Elektronentheorie zugrunde gelegt wird Zunächst erkennen wir, daß *Dubletts, Tripletts, Quartetts usw. auftreten* und durch den Nenner $n + n' = 2, 3, 4$ usw. als solche charakterisiert werden, *ganz unabhängig davon, welchen Wert die Koeffizienten a und b in den Ausdrücken für Impuls und Energie (Gl. [4] und [5]) besitzen. Ferner ist das Abstandsverhältnis der Einzellinien in den Tripletts, Quartetts usw. unabhängig von a und b.*

Dagegen tritt in allen $\Delta\nu$ der Faktor $2\gamma = 4(2a - b)$ auf, der im Abrahamschen Falle nach (5a) gleich $^4/_5$, im Lorentzschen nach (5b) gleich 1 zu setzen ist. Für den Fall $2\gamma = 1$ gehen unsere Gleichungen genau in die von Sommerfeld[1]) abgeleiteten über, wie es sein muß. *Das Wasserstoffdublett kann also nach der Theorie des starren Elektrons nur $^4/_5$ mal so groß sein wie das nach der Theorie des deformierbaren.* Dieser Unterschied von 20 Proz. muß sich bei genauen Messungen bemerkbar machen. Sehr genau gemessen ist die Feinstruktur von Paschen[2]), zwar nicht an Wasserstoff, aber an einfach ionisiertem Helium ($E = 2e$), das sich streng wasserstoffähnlich verhält, bei dem aber wegen des Faktors $(E/e)^4$ die Schwingungsdifferenz 16mal größer ist als beim Wasserstoffdublett. Die hieraus rückwärts gerechnete Größe des Wasserstoffdubletts ergibt sich dabei nach Paschen zu

$$\Delta\nu_H = 2\gamma\frac{N\alpha^2}{2^4} = 0{,}3645 \pm 0{,}0045\,.$$

Ohne diese Beobachtungen in Zweifel zu ziehen, wollen wir den Spielraum $\Delta\nu_H$ weiter nehmen, indem wir als völlig sicher hinstellen, daß $\Delta\nu_H$ zwischen 0,35 und 0,38 liegt. Dann ist zu schreiben

$$\Delta\nu_H = 0{,}365 \pm 0{,}015\,.$$

Danach wird wegen (15)

$$\alpha^2 = \frac{\Delta\nu_H}{N}\frac{2^4}{2\gamma}, \quad (N = 1{,}097\cdot 10^5).$$

Im relativistischen Falle ($\gamma = \frac{1}{2}$) berechnet sich hieraus

$$\alpha^2 = (5{,}32 \pm 0{,}22)\cdot 10^{-5}; \quad \alpha = (7{,}29 \pm 0{,}15)\cdot 10^{-3},$$

im Abrahamschen Falle ($a = \frac{2}{5}$)

$$\alpha^2 = \tfrac{5}{4}(5{,}32 \pm 0{,}22)\cdot 10^{-5} = (6{,}65 \pm 0{,}28)\cdot 10^{-5}\,.$$

$$\alpha = (8{,}15 \pm 0{,}17)\cdot 10^{-3}\,.$$

Diese empirisch-spektroskopischen Werte von α haben wir nun mit dem Werte zu vergleichen, der sich aus der theoretischen Bedeutung

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch}$$

berechnet.

---

1) Ann. d. Phys. **51.** p. 62. 1916.
2) Ann. d. Phys. **50.** p. 901. 1916.

Sommerfeld hat bereits gezeigt, daß der relativistische Wert

$$\alpha = 7{,}29 \,.\, 10^{-3}, \quad \alpha^2 = 5{,}30 \,.\, 10^{-5}$$

mit den besten Beobachtungswerten

$$e = 4{,}76 \,.\, 10^{-10}, \quad h = 6{,}51 \,.\, 10^{-27}$$

vollkommen in Einklang ist. Der Wert für α^2 nach Abraham ist aber um 20 Proz. größer. Selbst wenn man, um einen möglichst großen Wert von α zu bekommen, den sicher zu großen Wert $e = 4{,}8 \,.\, 10^{-10}$ und den sicher zu kleinen Wert $h = 6{,}3 \,.\, 10^{-27}$ nimmt, wird

$$\alpha = 7{,}65 \,.\, 10^{-3}, \quad \alpha^2 = 5{,}86 \,.\, 10^{-5}$$

Der Wert von α, der sich aus der Feinstruktur mit der Theorie des starren Elektrons ergeben würde, nämlich wenigstens

$$\alpha = 7{,}98 \,.\, 10^{-3}; \quad \alpha^2 = 6{,}37 \,.\, 10^{-5},$$

ist damit trotz der weit gesteckten Grenzen für $\Delta \nu_H$ noch lange nicht erreicht, während sich der Wert auf Grund der Relativitätstheorie ganz zwanglos den Beobachtungen fügt. Daraufhin dürfen wir wohl behaupten, *daß die tatsächlich beobachtete Größe der Feinzerlegung von wasserstoffähnlichen Spektrallinien durch die Formeln der Bohr-Sommerfeldschen Theorie nur dann exakt wiedergegeben wird, wenn man dem Elektron die von der Lorentz-Einsteinschen Theorie geforderten Eigenschaften beilegt. Bei Anwendung des Abrahamschen Elektrons ist eine Übereinstimmung auf keine Weise zu erzielen.*

II. Die zweite Näherung und der *L*-Term der Röntgenspektren.

§ 7. Allgemeines über das *L*-Dublett.

In der sogenannten *L*-Serie der Röntgenspektren tritt eine Anzahl von Linien auf, die sich paarweise derart zusammenfassen lassen, daß je ein Dublett von konstanter Schwingungsdifferenz entsteht. Es sind bis jetzt fünf solcher *L*-Dubletts innerhalb der *L*-Serie bekannt. Nach unseren Betrachtungen in § 6 muß ein Dublett, wenn es einem wasserstoffähnlichen Spektrum angehört und mit konstanter Größe in der ganzen Serie auftritt, dem ersten Term der Serienformel mit dem Nenner $n + n' = 2$ entsprechen. In der Tat konnte

Sommerfeld[1]) diesen L-Term aus dem Dublett der L-Serie berechnen und fand den Nenner mit aller Schärfe zu

$$n + n' = 2{,}000\,.$$

Alle seine Rechnungen setzten dabei das Elektron als deformierbar im Sinne der Lorentz-Einsteinschen Theorie voraus. Wir wollen nun sehen, ob dieses Resultat erhalten bleibt, wenn wir statt des Lorentzschen das Abrahamsche Elektron benutzen.

Unsere bisherigen Formeln genügen nicht zu diesem Zwecke. Während nämlich im Gebiete der optischen Spektren das Wasserstoffdublett nur mit den feinsten experimentellen Hilfsmitteln zu trennen und zu messen ist, besteht sein Analogon im Gebiete der Röntgenspektren bekanntlich aus weit auseinanderfallenden Linien, so daß es trotz der vorläufig noch unvollkommenen röntgenspektroskopischen Apparate genauer meßbar ist als jenes. Die Größe des in Rede stehenden Dubletts, das bis jetzt bei den Elementen von der Ordnungszahl $Z = 30$ (Zn) bis $Z = 92$ (U) im periodischen System gemessen worden ist, rührt von dem Umstande her, daß, wie bekannt, die Kernladung mit der Ordnungszahl zunimmt und in den Formeln (15), (16) und (17) für die Feinstruktur in der 4. Potenz auftritt. Mit Rücksicht darauf, daß die Zahl der in den Röntgenspektren wirksamen Elementarladungen des Kerns nicht ganz so groß ist wie die Ordnungszahl Z, ist das kleinste gemessene L-Dublett in Schwingungszahlen nicht ganz 30^4mal so groß, wie das Wasserstoffdublett, das größte nicht ganz 92^4mal so groß. Bei großen Kernladungen ist, da unsere Rechnungen nach Potenzen von $\alpha . E/e$ fortschreiten, diese Größe nicht so klein wie bei Wasserstoff und Helium, so daß zur Anpassung an die Meßgenauigkeit eine Entwicklung des Energieausdruckes bis $\alpha^6\,(E/e)^6$ notwendig wird. Da, wie in § 3 gezeigt wurde, α und β von gleicher Größenordnung sind, müssen wir auch unsere Ausgangsformeln für Impuls und kinetische Energie bis zu β^6 führen.

§ 8. Zweite Näherungen für Impuls und Energie.

Nach Abraham ist der Impuls

$$m\,v = m_0\,c\,\beta\,(1 + \tfrac{2}{5}\,\beta^2 + \tfrac{9}{3\,5}\,\beta^4)\,,$$

1) Ann. d. Phys. **51**. p. 125. 1916.

die kinetische Energie

$$T = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} (1 + \tfrac{3}{5} \beta^2 + \tfrac{3}{7} \beta^4).$$

In der Relativitätstheorie hingegen ist

$$m v = m_0 c \beta (1 + \tfrac{1}{2} \beta^2 + \tfrac{3}{8} \beta^4),$$
$$T = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} (1 + \tfrac{3}{4} \beta^2 + \tfrac{5}{8} \beta^4).$$

Um beide Fälle zu umfassen, schreiben wir

(18) $$m v = m_0 c \beta (1 + a_1 \beta^2 + a_2 \beta^4),$$

(19) $$T = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} (1 + b_1 \beta^2 + b_2 \beta^4).$$

Aus Gl. (19) folgt, wenn man in der Klammer β^2 durch die erste Näherung

$$\frac{2T}{m_0 c^2} \left(1 - b_1 \frac{2T}{m_0 c^2}\right)$$

ersetzt,

(20) $$\beta^2 = \frac{2T}{m_0 c^2} \left[1 - b_1 \frac{2T}{m_0 c^2} + B_1 \left(\frac{2T}{m_0 c^2}\right)^2\right].$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$B_1 = 2 b_1^2 - b_2.$$

Aus (18) wird

(18a) $$(m v)^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 (1 + 2 a_1 \beta^2 + A_1 \beta^4),$$

worin die Abkürzung gebraucht ist

$$A_1 = a_1^2 + 2 a_2.$$

Durch Einsetzen von (20) in (18a) ergibt sich weiter

(21) $$(m v)^2 = 2 m_0 T \left[1 + \gamma \frac{T}{m_0 c^2} + \delta \left(\frac{T}{m_0 c^2}\right)^2\right].$$

Hierin ist

$$\gamma = 2 (2 a_1 - b_1),$$
$$\delta = 4 (A_1 + B_1 - 4 a_1 b_1) = 4 (a_1^2 + 2 a_2 + 2 b_1^2 - b_2 - 4 a_1 b_1).$$

Für das starre Elektron gilt

$$(22\,a)\qquad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{5}, & b_1 = \frac{3}{5}, & a_2 = \frac{9}{35}, & b_2 = \frac{3}{7}, \\ & \gamma = \frac{2}{5}, & \delta = \frac{4}{175}, \end{cases}$$

für das deformierbare Elektron

$$(22\,b)\qquad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}, & b_1 = \frac{3}{4}, & a_2 = \frac{3}{8}, & b_2 = \frac{5}{8}, \\ & \gamma = \frac{1}{2}, & \delta = 0. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Gl. (1) (§ 1)

$$T = W + \frac{e\,E}{r}$$

erhalten wir aus (21)

$$(23)\qquad \begin{cases} (m\,v)^2 - \frac{p^2}{r^2} = 2\,m_0 \left(W + \frac{e\,E}{r}\right)\left\{1 + \frac{\gamma}{m_0\,c^2}\left(W + \frac{e\,E}{r}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\delta}{(m_0\,c^2)^2}\left(W + \frac{e\,E}{r}\right)^2\right\} - \frac{p^2}{r^2}. \end{cases}$$

§ 9. Das radiale Phasenintegral.

Wenn wir schreiben

$$(24)\qquad (m\,v)^2 - \frac{p^2}{r^2} = A + \frac{2\,B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3},$$

so zeigt ein Vergleich mit (23), daß mit Berücksichtigung der azimutalen Quantenbedingung

$$p = \frac{n\,h}{2\,\pi},$$

A, B, C, D die Bedeutung haben

$$(25\,a)\qquad \begin{cases} A = 2\,m_0\,W\left[1 + \gamma\,\frac{W}{m_0\,c^2} + \delta\left(\frac{W}{m_0\,c^2}\right)^2\right], \\ B = m_0\,e^2\left(\frac{E}{e}\right)\left[1 + 2\,\gamma\,\frac{W}{m_0\,c^2} + 3\,\delta\left(\frac{W}{m_0\,c^2}\right)^2\right], \\ C = -\left(\frac{n\,h}{2\,\pi}\right)^2\left[1 - 2\,\gamma\,\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 - 6\,\delta\,\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\frac{W}{m_0\,c^2}\right], \\ D = 2\,\delta\,\frac{e^6}{m_0\,c^4}\left(\frac{E}{e}\right)^3. \end{cases}$$

Wir haben früher (p. 15) gesehen, daß $W/m_0 c^2$ eine kleine Größe von der Ordnung α^2 ist. Es ist daher konsequent, wenn wir später die in den Klammern auftretenden Größen

$$\frac{W}{m_0 c^2} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^2$$

durch die vorher in (Gl. 13) gefundene Näherung ersetzen, nach einem ähnlichen Verfahren, wie es bei β^2 in § 8 angewendet wurde. Wir kennzeichnen die durch den früheren Näherungswert zu ersetzenden Größen mit einem Querstrich. Außerdem können wir die dreigliedrigen Klammersummen durch Produkte von Binomen ausdrücken, wenn wir beachten, daß

$$\left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^3$$

von der Ordnung α^6 ist und bei der Ausrechnung der Binome nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht:

$$(25\,\text{b}) \quad \begin{cases} A = 2 m_0 W \left(1 + \gamma \frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)\left[1 + \delta \left(\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)^2\right], \\ B = m_0 e^2 \left(\frac{E}{e}\right)\left(1 + 2\gamma \frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)\left[1 + 3\delta \left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^2\right], \\ C = -\left(\frac{n h}{2\pi}\right)^2 \left[1 - 2\gamma \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right]\left[1 - 6\delta \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 \frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right], \\ D = 2\delta \frac{e^6}{m_0 c^4}\left(\frac{E}{e}\right)^3. \end{cases}$$

Wir haben nun das Phasenintegral

$$n' h = \oint \sqrt{(m r)^2 - \frac{p^2}{r^2}}\, dr = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}}\, dr$$

auszuführen, und zwar wollen wir dies, ähnlich wie in § 3, in der komplexen r-Ebene tun. Die Integration[1]) ist ursprünglich wieder von $r_{\text{min.}}$ bis $r_{\text{max.}}$ und zurück zu erstrecken, wobei das Vorzeichen der Wurzel positiv ist bei positivem, negativ bei negativem dr. In der komplexen r-Ebene entspricht dies einem Umgang um den Verzweigungsschnitt zwischen den Verzweigungspunkten r_1 und r_2, die durch diejenigen beiden Nullstellen des Radikanden gegeben sind, die für $D = 0$ nicht in den Nullpunkt rücken. Das Hinzutreten zweier weiterer, für $D = 0$ verschwindender Verzweigungs-

1) A. Sommerfeld, Münch. Ber. 1916. p. 157.

punkte kennzeichnet das Integral als ein elliptisches; der Integrationsweg charakterisiert es als ein sogenanntes vollständiges elliptisches.

Für die praktische Ausrechnung genügt es vollkommen, zu schreiben, wenn wir beachten, daß D eine sehr kleine Größe ist,

$$\oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}}\, dr = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr + \frac{1}{2} \oint \frac{D}{r^3 \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}}\, dr.$$

Die Verzweigungspunkte r_1' und r_2' des jetzt verkürzten Radikanden

$$A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}$$

sind nicht mehr mit denen (r_1 und r_2) des unverkürzten Radikanden identisch, um die ursprünglich der Integrationsweg gelegt werden sollte. Man kann aber den Umlauf jedenfalls so nehmen, daß auch r_1' und r_2' mitumfaßt werden; infolgedessen gilt für die Ausrechnung das in § 3 Gesagte.

Das erste Integral fanden wir dort nach (11) zu

$$\oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr = -2\pi i \left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right),$$

worin $\sqrt{C}$ eine negativ-imaginäre, $\sqrt{A}$ eine positiv-imaginäre Größe ist.

Zu dem zweiten Integral rechter Hand liefert, wie man ohne weiteres sieht, der Punkt $r = \infty$ keinen Beitrag. Der einzige darin vorkommende Pol ist der Punkt $r = 0$. Wir können also unseren Umlauf einfach um die singuläre Stelle $r = 0$ zusammenziehen. Das Residuum N' im Nullpunkte wird gefunden aus der dort gültigen Entwicklung

$$\frac{1}{2} \frac{D}{r^3 \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}}\, dr = \frac{1}{2} \frac{D}{r^2 \sqrt{C}} \left(1 - \frac{B}{C} r + \ldots\right) dr,$$

als Koeffizient von dr/r

$$N' = -\tfrac{1}{2} B D \cdot C^{-3/2}.$$

Damit haben wir

$$(26)\qquad \begin{cases} n'h = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}}\, dr \\ \qquad\quad = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} - \frac{1}{2} B D \cdot C^{-3/2}\right). \end{cases}$$

§ 10. Berechnung der Energiekonstanten.

Im folgenden setzen wir zur Abkürzung

$$(27)\qquad Lh = n'h + 2\pi i(C^{1/2} - \tfrac{1}{2} B D C^{-3/2}).$$

Aus (26) wird dann

$$Lh = 2\pi i \frac{B}{\sqrt{A}}$$

und

$$A = -\frac{4\pi^2 B^2}{h^2 L^2}.$$

Setzt man für A und B die Werte von (25b) ein, so erhält man

$$2 m_0 W = \frac{-\frac{4\pi^2 m_0^2 e^4}{h^2 L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1 + 2\gamma\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right]^2\left[1 + 3\delta\left(\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)^2\right]^2}{\left(1 + \gamma\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)\left[1 + \delta\left(\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)^2\right]}$$

und mit Behandlung von $\overline{W}/m_0 c^2$ als kleiner Größe und Berücksichtigung von (10)

$$(28)\qquad \begin{cases} W = -\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2 L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1 + 3\gamma\frac{\overline{W}}{m_0 c^2} + \gamma^2\left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad \left[1 + 5\delta\left(\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Nach dem bei Gl. (25 b) Gesagten haben wir hier $\overline{W}/m_0 c^2$ durch einen der früheren Näherungswerte (Gl. [13] aus § 4) auszudrücken. In der bequemsten Form entnehmen wir die Näherung gleich aus (28) selbst, als

$$\frac{\overline{W}}{m_0 c^2} = -\frac{\alpha^2}{2 L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma\frac{\alpha^2}{L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\right].$$

Dies in (28) eingesetzt, ergibt

$$(29)\qquad \begin{cases} W = -\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2 L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1 - \tfrac{3}{2}\gamma\frac{\alpha^2}{L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 + \tfrac{5}{2}\gamma^2\frac{\alpha^4}{L^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\right] \\ \qquad\qquad \times\left[1 + \tfrac{5}{4}\delta\frac{\alpha^4}{L^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\right]. \end{cases}$$

Hierin haben wir L wieder seinen Wert nach (27) zu geben. Es wird zunächst nach (25b) und mit Entwicklung nach α^2

$$2\pi i C^{1/2} = nh\left[1 - \gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2}\frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\right]$$
$$\left[1 - 3\delta\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\frac{\overline{W}}{m_0 c^2}\right].$$

Es genügt offenbar, für $\overline{W}/m_0c^2$ in der zweiten Klammer die allererste Näherung

$$-\frac{\alpha^2}{2L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2$$

zu setzen. Man erhält

$$2\pi i C^{1/2} = nh\left[1 - \gamma\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2}\frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\right]\left[1 + \tfrac{3}{2}\delta\frac{\alpha^4}{n^2L^2}\left(\frac{E}{e}\right)^4\right].$$

Ferner wird nach (25b) mit Beachtung von (10)

$$2\pi i\tfrac{1}{2} B D C^{-3/2} = \frac{2\pi\delta\cdot e^8}{c^4\left(\frac{nh}{2\pi}\right)^3}\left(\frac{E}{e}\right)^4 = \delta\frac{\alpha^4}{n^3}\left(\frac{E}{e}\right)^4 h.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und Gl. (27) folgt endlich

$$(30a)\quad \begin{cases} L = (n+n')\left[1 - \gamma\dfrac{\alpha^2}{n(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right] \\ \qquad \times\left[1 + \tfrac{3}{2}\delta\dfrac{\alpha^4}{n^3L^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4 - \delta\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right]. \end{cases}$$

Rechter Hand steht im zweiten Gliede der zweiten Klammer im Nenner L^2. Da im Zähler α^4 steht, kann hier L^2 durch seine allererste Näherung $(n+n')^2$ ersetzt werden. Eine weitere Näherung ist

$$(30b)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{L^2} = \dfrac{1}{(n+n')^2}\left\{1 + 2\gamma\dfrac{\alpha^2}{n(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2 + 3\gamma^2\dfrac{\alpha^4}{n^2(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right. \\ \qquad\qquad \left. + \gamma^2\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right\} \\ \qquad \times\left\{1 - 3\delta\dfrac{\alpha^4}{n^2(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4 + 2\delta\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right\}. \end{cases}$$

Durch Einführung von (30b) in (29) erhält man

$$\begin{cases} W = -\dfrac{m_0c^2\alpha^2}{2(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2\left\{1 + 2\gamma\dfrac{\alpha^2}{n(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2 + 3\gamma^2\dfrac{\alpha^4}{n^2(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right. \\ \qquad\qquad \left. + \gamma^2\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right\} \\ \times\left\{1 - \tfrac{3}{2}\gamma\dfrac{\alpha^2}{(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2\left[1 + 2\gamma\dfrac{\alpha^2}{n(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2\right] + \tfrac{5}{2}\gamma^2\dfrac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right\} \\ \times\left\{1 + \tfrac{5}{4}\delta\dfrac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4 - 3\delta\dfrac{\alpha^4}{n^2(n+n')^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4 + 2\delta\dfrac{\alpha^4}{n^3(n+n')}\left(\dfrac{E}{e}\right)^4\right\}. \end{cases}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} W = &-\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left\{1-\gamma\alpha^2\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(\frac{3}{2(n+n')^2}-\frac{2}{n(n+n')}\right)\right.\\ &\left.+\gamma^2\alpha^4\left(\frac{E}{e}\right)^4\left(\frac{5}{2(n+n')^4}-\frac{3}{n^2(n+n')^2}+\frac{2}{n^3(n+n')}\right)\right\}\\ &\times\left\{1+\delta\alpha^4\left(\frac{E}{e}\right)^4\left(\frac{5}{4(n+n')^4}-\frac{3}{n^2(n+n')^2}+\frac{2}{n^3(n+n')}\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Erinnern wir uns wieder daran, daß

$$\frac{m_0 c^2 \alpha^2}{2} = Nh,$$

ist, so folgt nach einer kleinen Umformung

$$(31)\left\{\begin{aligned} W = &-\frac{Nh}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left\{1+\frac{\gamma}{2}\frac{\alpha^2}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left(1+4\frac{n'}{n}\right)\right.\\ &\left.+\frac{\gamma^2}{2}\frac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left[1+6\left(\frac{n'}{n}\right)+12\left(\frac{n'}{n}\right)^2+2\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right]\right\}\\ &\times\left\{1+\frac{\delta}{4}\frac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left[1+12\left(\frac{n'}{n}\right)^2+8\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Für den Fall des relativistischen Elektrons ist nach (22b) $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = 0$, so daß die zweite geschweifte Klammer in (31) fortfällt; der übrigbleibende Teil stimmt genau mit der Sommerfeldschen Formel überein. Für das starre Elektron ist nach (22a)

$$\gamma = \frac{2}{5}, \quad \delta = \frac{4}{175},$$

so daß wir dafür speziell die Gleichung erhalten

$$(31a)\left\{\begin{aligned} W = &-\frac{Nh}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left\{1+\frac{1}{5}\frac{\alpha^2}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1+4\frac{n'}{n}\right]\right.\\ &+\frac{2}{25}\frac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left[1+6\left(\frac{n'}{n}\right)+12\left(\frac{n'}{n}\right)^2+2\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right]\\ &\left.+\frac{1}{175}\frac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left[1+12\left(\frac{n'}{n}\right)^2+8\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$(31b)\left\{\begin{aligned} W = &-\frac{Nh}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left\{1+\frac{1}{5}\frac{\alpha^2}{(n+n')^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2\left[1+4\frac{n'}{n}\right]\right.\\ &\left.+\frac{3}{175}\frac{\alpha^4}{(n+n')^4}\left(\frac{E}{e}\right)^4\left[5+28\left(\frac{n'}{n}\right)+60\left(\frac{n'}{n}\right)^2+12\left(\frac{n'}{n}\right)^3\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

§ 11. Das L-Dublett mit starrem und deformierbarem Elektron.

Schon Moseley fand bei seinen Messungen an Röntgenspektren, daß die Schwingungszahl der einem Element von der Ordnungszahl Z im natürlichen Systeme angehörenden Linie ungefähr proportional dem Quadrat dieser Ordnungszahl ist. Um uns diesen Tatsachen anzupassen, haben wir in (31) (E/e) durch $Z - \Delta$ zu ersetzen, worin Δ eine noch zu bestimmende Konstante ist. Nehmen wir für die L-Serie $n + n' = 2$ mit den Möglichkeiten $n = 2$, $n' = 0$ und $n = 1$, $n' = 1$, so erhalten wir aus (31) und (14) den L-Term bzw. L'-Term. L und L' sind die Charakteristiken der Endbahnen, auf die ein Elektron von irgend welcher Anfangslage übergeht, wenn die Dubletts der L-Serie entstehen (vgl. § 5)

Es ist

$$(n = 2,\ n' = 0) \qquad L = \frac{N(Z-\Delta)^2}{2^2}\left\{1 + \frac{\gamma}{2}\frac{\alpha^2}{2^2}(Z-\Delta)^2 + \frac{\gamma^2}{2}\frac{\alpha^4}{2^4}(Z-\Delta)^4 + \frac{\delta}{4}\frac{\alpha^4}{2^4}(Z-\Delta)^4\right\},$$

$$(n = 1,\ n' = 1) \qquad L' = \frac{N(Z-\Delta)^2}{2^2}\left\{1 + \frac{5}{2}\gamma\frac{\alpha^2}{2^2}(Z-\Delta)^2 + \frac{21}{2}\gamma^2\frac{\alpha^4}{2^4}(Z-\Delta)^4 + \frac{21}{4}\delta\frac{\alpha^4}{2^4}(Z-\Delta)^4\right\}.$$

Daraus folgt die Dublettdifferenz

$$(32)\left\{\begin{aligned} \Delta\nu &= L' - L \\ &= 2\gamma\frac{N\alpha^2}{2^4}(Z-\Delta)^4\left\{1 + 5\gamma\frac{\alpha^2}{2^2}(Z-\Delta)^2 + \frac{5}{2}\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha^2}{2^2}(Z-\Delta)^2\right\}. \end{aligned}\right.$$

Wie Sommerfeld[1]) gezeigt hat, kann man unter Zugrundelegung der experimentellen Daten, ausgehend von der letzten Gleichung, in der man sich den Nenner 2^4 vor der Klammer durch b^4 ersetzt denken möge, Δ (bei Sommerfeld l genannt) und b berechnen. Indem er

$$\frac{Z-\Delta}{b}$$

graphisch darstellte, lagen die erhaltenen Punkte genau auf einer Geraden, so daß aus deren Neigung b zu ermitteln war.

1) Ann. d. Phys. **51.** p. 125. 1916.

b ergab sich genau zu 2,000, womit rückwärts alle Annahmen über die Wasserstoffähnlichkeit als zu Recht bestehend ausgewiesen wurden. Δ wurde gleich 3,5 gefunden, so daß das „relativistische" L-Dublett nach (32) und mit dem Werte $\gamma = \frac{1}{2}$ (nach [22]) in unserer Näherung genau wiedergegeben wird durch

$$(33) \qquad \frac{\Delta\nu}{N} = \frac{\alpha^2}{2^4}(Z-3{,}5)^4\left\{1+\frac{5}{2}\frac{\alpha^2}{2^2}(Z-3{,}5)^2\right\}.$$

Mit dem Abrahamschen Elektron müßte das Dublett nach (32) darstellbar sein durch

$$\left(\gamma=\frac{2}{5},\quad \delta=\frac{4}{175}\quad \text{Gl. (22a)}\right),$$

$$(34) \qquad \frac{\Delta\nu}{N} = \frac{4}{5}\frac{\alpha^2}{b^4}(Z-\Delta)^4\left\{1+2\frac{\alpha^2}{b^2}(Z-\Delta)^2+\frac{1}{7}\frac{\alpha^2}{b^2}(Z-\Delta)^2\right\}.$$

Hierin sind Δ und b neu zu bestimmende Konstanten. In erster Näherung ist, wenn wir von den Klammerkorrektionen absehen, nach (33) und (34)

$$\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\,\frac{Z-\Delta}{b} = \frac{Z-3{,}5}{2}.$$

Wegen der oben erwähnten Linearität der rechten Seite muß sein

$$(35) \qquad \begin{cases} b = 2\sqrt[4]{\frac{4}{5}} = 1{,}892, \\ \Delta = 3{,}5. \end{cases}$$

Wir führen diese ersten Näherungen in die Klammern von (34) ein und erhalten durch Vergleich mit (33)

$$\frac{4}{5}\frac{(Z-\Delta)^4}{b^4} = \frac{(Z-3{,}5)^4}{2^4}\left\{1+\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{15}{7}\cdot\frac{1}{1{,}892^2}\right)\alpha^2(Z-3{,}5)^2\right\}$$

$$= \frac{(Z-3{,}5)^4}{2^4}\left\{1+0{,}02\,\alpha^2(Z-3{,}5)^2\right\},$$

$$\frac{Z-\Delta}{b} = \frac{Z-3{,}5}{2\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{5}}}\left\{1+0{,}005\,\alpha^2(Z-3{,}5)^2\right\}.$$

Der Einfluß der Klammerkorrektion ist vollkommen ohne Belang, so daß das Resultat in (35) erhalten bleibt.

$$\frac{Z - \Delta}{b}$$

als Funktion von Z aufgetragen, wird auch jetzt merklich eine gerade Linie, aus der sich die Konstanten $\Delta = 3{,}5$ und $b = 1{,}892$ ergeben. Die Kernladungscharakteristik Δ bleibt im Falle der Relativität und des starren Elektrons die gleiche, woraus man schließen kann, daß sie in keinem direkten ursächlichen Zusammenhang mit dem kreisenden Elektron steht. Der Termnenner jedoch, der sich im Falle des deformierbaren Elektrons exakt gleich 2 ergab und damit die Erklärung des L-Dubletts im Sinne wasserstoffähnlicher Spektren nachträglich rechtfertigte, wird mit dem starren Elektron gleich 1,892, so daß von einer Deutung des L-Dubletts im quantentheoretischen Sinne keine Rede mehr sein könnte. Wer daher an der Sommerfeldschen Theorie der Röntgenspektren festhalten will, ist genötigt, das starre Elektron abzulehnen.

Zusammenfassung.

Im ersten Teile dieser Arbeit werden Formeln für die Feinstruktur wasserstoffähnlicher Spektrallinien auf Grund des Bohrschen Modells und der Sommerfeldschen Theorie der Feinstruktur entwickelt in einer den Beobachtungen angepaßten Genauigkeit (erste Näherung). Die Rechnung ist so geführt, daß die Ausdrücke für Impuls und kinetische Energie des im Bohrschen Modell auftretenden Elektrons allgemein nach Potenzen von $\beta = v/c$ fortschreiten. Es werden in den fertigen Formeln für die noch unbestimmten Koeffizienten einmal die entsprechenden Werte der Abrahamschen, dann die der Lorentzschen Elektronentheorie eingesetzt. Ein Vergleich mit den Messungen von Paschen zeigt, daß die tatsächlich beobachtete Feinstruktur durch die Formeln der Relativitätstheorie mit den besten Werten der universellen Konstanten N, e und h zwanglos erklärt werden kann, wie auch Sommerfeld fand, daß die Abrahamsche Theorie hingegen mit keinen zulässigen Werten von e und h die richtige Größe der Feinstruktur wiederzugeben vermag.

Im zweiten Teile wird eine zweite Näherungsrechnung ausgeführt und auf das Dublett der L-Serie der Röntgenspektren angewendet, aus dem Sommerfeld den sogenannten

L-Term berechnen und als streng wasserstoffähnlich nachweisen konnte, wenn er die relativistische Elektronenmasse zugrunde legte. Unsere Schlußformeln sind so gehalten, daß die numerischen Werte sowohl aus der Theorie des deformierbaren wie der des starren Elektrons darin eingesetzt werden können. Dabei ergibt sich für letzteres der Termnenner 1,892 statt 2,000. Die Wasserstoffähnlichkeit des Dubletts der L-Serie geht also bei Anwendung der Theorie des starren Elektrons verloren und seiner Erklärung würde damit der Boden entzogen.

Das Ergebnis beider Teile spricht, wie auch die neueren Messungen von e/m, zugunsten der Relativitätstheorie.

Lebenslauf.

Am 2. Juli 1886 wurde ich, Karl Ludwig Glitscher, als Sohn des Buchdruckereibesitzers Karl Glitscher in Mülheim am Rhein (Cöln-Mülheim) geboren. Ich besuchte die Volksschule und das Gymnasium dieser Stadt bis Untersekunda. Um mich dem Maschinenbau zu widmen, arbeitete ich zwei Jahre praktisch in einer Eisengießerei und Maschinenfabrik und besuchte zwei Jahre die Kgl. Höhere Maschinenbauschule zu Cöln, die ich Ostern 1906 absolvierte. In der Folgezeit war ich auf den technischen Büros der Gasmotorenfabrik Deutz, der Optischen Werkstätten von Carl Zeiss, Jena, und der Gasmotorenfabrik A.-G., Cöln-Ehrenfeld, als Konstrukteur tätig. Von Anfang 1912 ab bereitete ich mich durch Selbststudium auf die Reifeprüfung vor, die ich im März 1913 am Gymnasium in Steele (Rheinland) ablegte.

Im Sommersemester 1913 wurde ich an der Universität München immatrikuliert und studierte seitdem hier ohne Unterbrechung. Vorlesungen und Übungen besuchte ich bei den Herren Professoren und Dozenten Graetz, Hartogs, Lindemann, Pringsheim, Röntgen, Rosenthal, v. Seeliger, Sommerfeld, Voß und Wagner. Ihnen allen bin ich zu Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Sommerfeld, an dessen Institut für theoretische Physik ich seit 1. September 1915 Assistent bin, möchte ich auch an dieser Stelle meiner aufrichtigen, dauernden Dankbarkeit und Verehrung versichern für die Förderung und die Anregungen, die ich in seinen Vorlesungen und Übungen, besonders aber in persönlichem Umgang mit ihm gewonnen habe, ebenso für das hilfreiche Interesse, das er der vorliegenden Arbeit entgegengebracht hat.